

oder, da $v^2 = y'^2$, auch

$$W = a y'^2. \quad (76)$$

Mit Gl. (74), (75) und (76) wird also

$$(y'' + g)(C - m_{\text{sec}} t) = P - a y'^2. \quad (77)$$

Dieses ist eine Riccatische Differentialgleichung 2. Ordnung. Ihre Integration im geschlossenen Ausdruck, ist unter Umständen möglich, sofern sich nämlich ein geeigneter integrierender Faktor findet, durch den sie auf eine lineare Form gebracht werden kann. Die Suche nach einem derartigen Eulerschen Multiplikator hat aber bisher zu keinem Erfolg geführt.

Es wurde daher eine Entwicklung des Integrals in eine Potenzreihe vorgenommen.

Setzt man

$$y' = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 \dots, \quad (78)$$

so wird

$$y'' = a_1 + 2 a_2 t + 3 a_3 t^2 + 4 a_4 t^3 \dots \quad (79)$$

Der erforderliche Wert y'^2 ergibt sich durch Quadrieren der Reihe (78)

$$\begin{aligned} y'^2 &= (a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots)(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots) \\ &= a_0^2 + a_1^2 t^2 + a_2^2 t^4 + a_3^2 t^6 + a_4^2 t^8 + \dots \\ &\quad + 2 a_0 a_1 t + 2 a_0 a_2 t^2 + 2 a_0 a_3 t^3 + \dots \\ &\quad + 2 a_1 a_2 t^3 + 2 a_1 a_3 t^4 + 2 a_1 a_4 t^5 + \dots \\ &\quad + 2 a_2 a_3 t^5 + 2 a_2 a_4 t^6 + 2 a_2 a_5 t^7 + \dots \\ &\quad + 2 a_3 a_4 t^7 + 2 a_3 a_5 t^8 + \dots \\ &\quad + 2 a_4 a_5 t^9 + \dots \\ &\quad + \dots \end{aligned} \quad (80)$$

Führt man nun (79) und (80) in die Differentialgleichung (77) ein, so wird

$$\begin{aligned} &g C + a_1 C + 2 a_2 C t + 3 a_3 C t^2 + \dots \\ &- g m_{\text{sec}} t - a_1 m_{\text{sec}} t - 2 a_2 m_{\text{sec}} t^2 + \dots \\ &+ a a_0^2 + a a_1^2 t^2 + a a_2^2 t^4 + a a_3^2 t^6 + \dots \\ &+ 2 a a_0 a_1 t + 2 a a_0 a_2 t^2 + 2 a a_0 a_3 t^3 + \dots \\ &+ 2 a a_1 a_2 t^3 + 2 a a_1 a_3 t^4 + \dots \\ &+ 2 a a_2 a_3 t^5 + 2 a a_2 a_4 t^6 + \dots \\ &+ 2 a a_3 a_4 t^7 + 2 a a_3 a_5 t^8 + \dots = P. \end{aligned}$$

Faßt man die Summanden nach Potenzen von t zusammen, so bekommt man

$$\begin{aligned} &g C + a_1 C + \\ &+ t(2 a_2 C - g m_{\text{sec}} - a_1 m_{\text{sec}} + 2 a a_0 a_1) \\ &+ t^2(3 a_3 C - 2 a_2 m_{\text{sec}} + a a_1^2 + 2 a a_0 a_2) \\ &+ t^3(4 a_4 C - 3 a_3 m_{\text{sec}} + 2 a a_0 a_3 + 2 a a_1 a_2) \\ &+ \dots = P. \end{aligned}$$

Am Anfang ist die Geschwindigkeit nun Null; also ist für $t = 0$, $y' = 0$ nach Gl. (78) auch

$$a_0 = 0 \quad (81 a)$$

Für $t = 0$ ist auch $P = g C + a_1 C$, also

$$a_1 = \frac{P - g C}{C}. \quad (81 b)$$

Es ist also

$$\begin{aligned} &P - g C - a_1 C = 0 \\ &= t(2 a_2 C - g m_{\text{sec}} - a_1 m_{\text{sec}} + 2 a a_0 a_1) \\ &+ t^2(3 a_3 C - 2 a_2 m_{\text{sec}} + a a_1^2 + 2 a a_0 a_2) \\ &+ t^3(4 a_4 C - 3 a_3 m_{\text{sec}} + 2 a a_0 a_3 + 2 a a_1 a_2) \\ &+ \dots \end{aligned}$$

Da diese Bedingung auch für $t = 0$ gilt, müssen die einzelnen Klammerausdrücke Null werden. Es wird also

$$2 a_2 C = g m_{\text{sec}} + a_1 m_{\text{sec}}$$

und

$$a_2 = m_{\text{sec}} \frac{g + a_1}{2 C}, \quad (81 c)$$

ebenso

$$a_3 = \frac{2 a_2 m_{\text{sec}} - a a_1^2}{3 C} \quad (81 d)$$

usw.

Werden für a_1 also P und C eingesetzt, so lassen sich damit beliebig viele Konstanten der Reihe bestimmen. Durch Einsetzen der Konstanten in die Reihe (78) ergibt sich dann die Geschwindigkeit y' der Rakete zu jeder beliebigen Zeit t . Die Höhe y der Rakete in jedem Augenblick bekommt man, wenn man (78) über die Zeit integriert. Es wird

$$y = K + a_0 t + a_1 \frac{t^2}{2} + a_2 \frac{t^3}{3} + \dots$$

Für $t = 0$ ist nun $y = 0$, also auch die Integrationskonstante $K = 0$. Da aber auch $a_0 = 0$ ist, so wird

$$y = a_1 \frac{t^2}{2} + a_2 \frac{t^3}{3} + a_3 \frac{t^4}{4} + \dots \quad (82)$$

wobei für $a_1, a_2, a_3 \dots$ wieder die Gl. (81 a, b, c, d ...) gelten.

BEISPIEL:

Das hier entwickelte Aggregat II gibt während einer Brennzeit von 16 sec einen konstanten Rückstoß von 340 kg. Sein Leergewicht ist 50 kg, sein Gesamtverbrauch an Brennstoff und Sauerstoff beträgt bei einer sekundlich ausströmenden Menge von 2 kg/sec ungefähr 32 kg. Die Rakete hat eine größte Widerstandsfläche von 0,0785 m²; für den Widerstandsbeiwert c_w sei zunächst 0,5 angenommen.

Gefragt ist nach Höhe und Geschwindigkeit der Rakete am Schluß der 10. Brennsekunde bei senkrechtem Abschub.

Für die hierfür abgeleiteten Beziehungen gelten also die Werte:

$$P = 340 \text{ kg} \quad t = 10 \text{ sec} \quad m_{\text{sec}} = 0,204 \frac{\text{kgsec}}{\text{m}}$$

$$C = \frac{50 + 32}{9,81} = 8,4 \frac{\text{kgsec}^2}{\text{m}}$$

$$a = c_w F \frac{\gamma_0}{2g} = \frac{0,5 \cdot 0,0785 \cdot 1,296}{19,62} = 0,0026 \frac{\text{kgsec}^2}{\text{m}}$$

Es errechnet sich also mit den Gl. (81 a, b, c, d) für die Konstanten $a_0 = 0$

$$a_1 = \frac{340 - 9,81 \cdot 8,4}{8,4} = 30,7 \text{ m sec}^{-2},$$

$$a_2 = 0,204 \frac{9,81 + 30,7}{2 \cdot 8,4} = 0,492 \text{ m sec}^{-3},$$

$$a_3 = \frac{2 \cdot 0,492 \cdot 0,204 - 0,0026 \cdot 30,7^2}{3 \cdot 8,4} = -0,0897 \text{ m sec}^{-4},$$

ebenso

$$a_4 = -0,00396 \text{ m sec}^{-5}, \quad a_5 = +0,000255 \text{ m sec}^{-6},$$

$$a_6 = +0,0000255 \text{ m sec}^{-7}, \quad a_7 = -0,00000044 \text{ m sec}^{-8}.$$

Die Reihe (78) heißt somit für $t = 10 \text{ sec}$

$$\begin{aligned} y'_{10 \text{ sec}} &\cong 0 + 307,0 + 49,2 - 89,7 - 39,6 + 25,5 + 22,5 - 4,4 \dots \\ &\cong 270 \text{ m/sec} (\pm 5 \text{ m/sec}). \end{aligned}$$

Für die Höhe der Rakete nach 10 sec ergibt sich mit (82) analog

$$\begin{aligned} y_{10 \text{ sec}} &\cong 1532 + 166 - 224 - 79 + 43 + 32 - 5,5 \dots \\ &\cong 1465 \text{ m} (\pm 10 \text{ m}). \end{aligned}$$

Wegen der vielen noch unbekanntenen Faktoren (z. B. Einfluß des Verbrennungsvorganges auf c_w) dürfte vorerst die angegebene Rechengenauigkeit ausreichen. Diese läßt sich aber bei Berechnung der höheren Potenzsummanden auch beliebig erhöhen.

Wie ersichtlich, sind die Reihen (78) und (82) in Perioden zu etwa 3 Summanden alternierend. Dadurch besteht die Gewähr für eine rasche Konvergenz der Reihen in den höheren Potenzen.

Für größere Werte von t werden freilich die Konvergenzverhältnisse beider Reihen sehr schlecht. Schon für $t = 16 \text{ sec}$ (Brennzeit des Aggregats II) ergeben sich Summanden, die darauf schließen lassen, daß Konvergenz hier überhaupt nicht mehr besteht. Die Reihen (78) und (82) eignen sich daher nur für kürzere Brennzeiten, unterhalb etwa 10 sec. Für Pulverraketen dürften sie z. B.